

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω V δ.γ. πεπεσ. διαστάσεως n με εσωτ. γινόμενο. Έστω $u_1, \dots, u_n$ ορθοκανονική βάση του V . Τότε

$$1) \forall u \in V \quad u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle u, u_n \rangle u_n = \sum_{i=1}^n \langle u, u_i \rangle u_i$$

$$2) \|u\|^2 = |\langle u, u_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle u, u_n \rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, u_i \rangle|^2$$

Ισότητα
Parseval

Απόδειξη

Έστω $u \in V$, $\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ τ.ω. $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$

$$\langle u, u_1 \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n, u_1 \rangle =$$

$$= \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle u_2, u_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_1 \rangle = \alpha_1 \|u_1\|^2 = \alpha_1$$

Όμοια $\langle u, u_i \rangle = \alpha_i \quad \forall i=1, \dots, n$ και έτσι έρω το 1)

Για το 2) Εφαρμόζω το γραμμικό Πυθαγόρειο Θέωρημα στην 1)

$$\text{γιατί } \langle \langle u, u_i \rangle u_i, \langle u, u_j \rangle u_j \rangle = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j$$

$$\|u\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \langle u, u_i \rangle u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|\langle u, u_i \rangle u_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, u_i \rangle|^2 \|u_i\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n |\langle u, u_i \rangle|^2$$

Άρα έχουμε και το 2)

Πρόταση

Έστω V δ -γ πεπερ. διάνυσμας u με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο του V . Τότε ισχύει η ανισότητα Bessel

$$\forall u \in V, \|u\|^2 \geq |\langle u, u_1 \rangle|^2 + |\langle u, u_2 \rangle|^2 + \dots + |\langle u, u_m \rangle|^2$$

Απόδειξη

Αφεντι. Επεκτείνουμε στο $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ σε μια ορθοκανονική βάση

$\{u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ του V

Τότε από ιδιότητα Parseval έχουμε $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, u_i \rangle|^2 \geq \sum_{i=1}^m |\langle u, u_i \rangle|^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V δ -γ με εσωτερικό γινόμενο ^{πεπερ. διάνυσμας.} Έστω $W \leq V$. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικά ορισμένα διανύσματα w_0, w' που ικανοποιούν τα εξής:

Έστω $u \in V$ τυχαίο διάνυσμα

1) $u_0 = w_0 + w'$

2) $w' \perp W$

3) $w_0 \in W$

Απόδειξη

Από την πρόταση $V = W \oplus W^\perp$

Άρα $\exists$ μοναδικά ορισμένα διανύσματα w_0, w' ώστε να ισχύουν

~~u_0~~ $u_0 = w_0 + w'$, ~~w_0~~ $w_0 \in W$ και $w' \in W^\perp$ και έπεται αμέσως το αποτέλεσμα.

Αρα από την πρόταση ορίζεται καλά συνάρτηση που σε κάθε $u \in V$ αντιστοιχίζει το μοναδικό $w \in W$ για το οποίο υπάρχει $w' \in W^\perp$ έτσι ώστε $u = w + w'$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πρόβολη του V στο W και συμβολίζεται $p_{r_w} : V \rightarrow W$. Η p_{r_w} είναι γραμμική συνάρτηση

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

1) Έστω V δ.γ. πεπερασμένων διαστάσεων και A, B υπόχωροι του V .

Τότε ισχύει $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$

Αν $A \cap B = \{0\}$ τότε $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B)$

2) Αν $\dim(W) = \dim(V) = n \in \mathbb{N}$ τότε $W = V$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω V δ.γ. πεπερ. διαστάσεων $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Ένας διανυσματικός υπόχωρος W του V διαστάσεων $n-1$ ονομάζεται υπερεπίπεδο. Ένας δ.γ. διαστάσεων 1 ονομάζεται ευθεία του V

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω V δ.γ με εσωτ. γινόμενο διάστασης $n+1$ όπου $n \in \mathbb{N}$
Έστω W υπερεπίπεδο του V . Τότε υπάρχει μοναδική εθεία του V που είναι κείθερη του W .

Απόδειξη

Από γνωστή πρόταση έχουμε ότι $V = W \oplus W^\perp$ με $\dim W = n$

Από 1) έχω $\dim(V) = \dim(W \oplus W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim W^\perp = n+1 - n = 1$. Άρα το $W^\perp$ είναι εθεία του V

Άρα η $W^\perp$ είναι εθεία κείθερη ~~στο~~ στον W .

Έστω l εθεία του V κείθερη στο W . Έχω τωρ $a \in l$, $a \neq 0$.

Άρα $a \perp u$ $\forall u \in W$. από του ορισμό ~~εάν~~ κείθερης εείδω

l και W . Άρα από του ορισμό του $W^\perp$ έχουμε ότι $a \in W^\perp$

Άρα $l \subseteq W^\perp$

Εφαρμόζω το 2). για τους χώρους l και $W^\perp$. Έχω $\dim l = 1 =$

$= \dim W^\perp$ άρα $l = W^\perp$

Άρα η μοναδική κείθερη εθεία στο W είναι το $W^\perp$

V δ.γ. διαστάσεως $n+1$, $n \in \mathbb{N}$ και $W \leq V$ με $\dim W = n$

1) Παιρνω βάση $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ του W τυχαία και τυχαία $u_{n+1} \notin W$
και κάνω ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt και $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$
και παίρνω μια ορθοκανονική βάση $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ του

$$V \text{ ώστε } W = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$$

Τότε $W^\perp = \langle v_{n+1} \rangle$ είναι η μοναδική ευθεία κείκτη στο W

2) Έστω $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ βάση του W , την ορθοκανονικοποιώ. και
παίρνω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
συμπίνω ότι $V = W \oplus W^\perp$

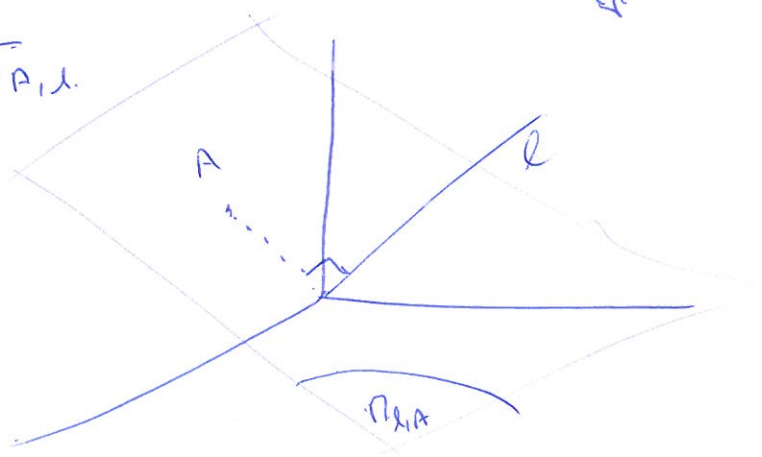
Έστω τυχαίο $u_0 \notin W$. Τότε $\exists$ μοναδικά $w_0 \in W, w' \in W^\perp$: $u_0 = w_0 + w'$

$$\text{Τότε } w_0 = \langle v_1, u_0 \rangle v_1 + \langle v_2, u_0 \rangle v_2 + \dots + \langle v_n, u_0 \rangle v_n = \sum_{i=1}^n \langle v_i, u_0 \rangle v_i$$

$$\text{και } w' = u_0 - w_0. \text{ Άρα } W^\perp = \langle u_0 - w_0 \rangle$$

Εφαρμογές SOS*

1) Έστω l μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$ και $A \notin l$. Θεωρώ το μοναδικό επίπεδο που διέρχεται από το A και το l . Τότε υπάρχει μοναδική ευθεία $l' \perp l$ όπου $l' \in \Pi_{A,l}$.



Εφαρμόζω το προηγούμενο Θεώρημα για $V = \Pi_{l,A}$
 $W = l$

$$I^B l' = W^\perp = l^\perp$$

2) Έστω Π ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$.

Τότε I μοναδική κείστος ευθεία στο Π

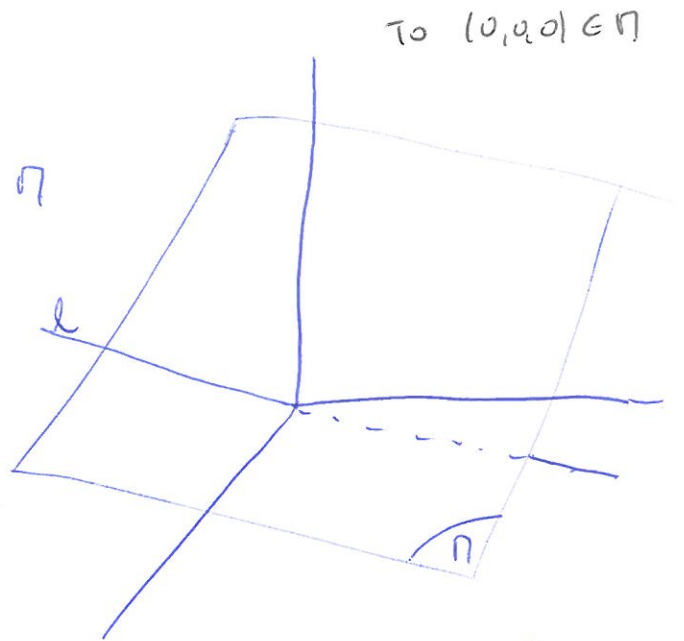
Εφαρμόζω την πρόταση για

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$W = \Pi$$

Τότε I μοναδική κείστος $l \perp \Pi$

$l = \Pi^\perp$ και την κατασκευάζω ως με την προηγούμενη μεθοδολογία



$$A \subseteq V$$

$$(A) = \{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, u_1, u_2, \dots, u_n \in A \}$$

Η ζεύξη διανυσματικών υποχώρων του διανυσματικού χώρου είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του χώρου

Έστω $K \subseteq V$ V.δ.χ.

Ορίζεται ο χώρος $K^* = \Pi \{ W \leq V, K \subseteq W \}$

Το K^* είναι δίκω. υποχώρος του V και αποδεικνύεται ότι $K^* = (K)$

Σχετικές θέσεις ευθειών και επιπέδων του $\mathbb{R}^3$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω l_1, l_2 να είναι 2 ευθείες του $\mathbb{R}^3$ με ένα κοινό σημείο $A \neq 0$
 Τότε $l_1 = l_2$.

(Α διασολισ)

Απόδειξη

Αφού $A \in l_1$ $(\sum u_0)$ ← γινόμενο που παράγεται
 από το μοναδικό $\sum u_0$
 Άρα $(\sum u_0) \in l_1$
 $(\sum u_0) = \sum a u_0, a \in \mathbb{R}^3$

Αλλά $\dim(\sum u_0) = \dim l_1 = 1$.

Από πρόταση που είχατε έχω $(\sum u_0) = l_1$ $\Rightarrow l_1 = l_2$.
 Ομοίως ~~για~~ αποδεικνύεται και το l_2 .

Άρα η ευθεία που περιέχει το $u_0 = A$ είναι μοναδική και είναι
 $u(\sum u_0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A = u_1, B = u_2$ ~~εξω~~ δύο γρ. ανεξ. διανύσματα του $\mathbb{R}^3$
 Τότε υπάρχει μοναδικό επίπεδο Π που διέρχεται από τα A και B

Απόδειξη

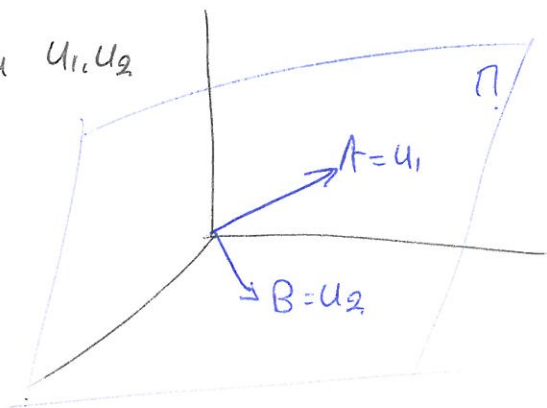
Έστω $W = (\sum u_1, u_2)$ ~~dim~~ $\dim W = 2$ αφού u_1, u_2 γρ. ανεξ.

Έστω Π ένα επίπεδο που περιέχει τα u_1, u_2

Αντικαθ. $\sum u_1, u_2 \in \Pi$

Τότε $\sum u_1, u_2 \in \Pi$ από ορισμό

όπως $\sum u_1, u_2 \in (\sum u_1, u_2) = W \Rightarrow W \subseteq \Pi$



και $\dim W = \dim \Pi$ ~~και~~

Συνεπώς $W = \Pi$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η τομή 2 διαφορετικών επιπέδων του $\mathbb{R}^3$ είναι μια ευθεία.

Απόδειξη

Τα Π_1, Π_2 δύο επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ $\Pi_1 \neq \Pi_2$

Και αρχικά το $\Pi_1 \cap \Pi_2$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

Δείχνουμε πρώτα ότι $\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbb{R}^3$

Αφού Π_1, Π_2 επίπεδα $\exists a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^3$ τ.ω.

$$\Pi_1 = \langle \{a_1, a_2\} \rangle \quad \text{και} \quad \Pi_2 = \langle \{a_3, a_4\} \rangle$$

Αφού $\Pi_1 \neq \Pi_2 \exists b \in \Pi_2$ και $b \notin \Pi_1$ όπου $b = a_3$ ή $b = a_4$.

Εν συνεχεία ότι τα a_1, a_2, b είναι γρ. ανεξ. $\Rightarrow \langle \{a_1, a_2, b\} \rangle = \mathbb{R}^3$

Τότε $u \in V$ ~~πούμε~~ και τυχαία γράφεται $u = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) + (\lambda_3 a_3) =$
 $= \Pi_1 + \Pi_2$

Αρα. $\mathbb{R}^3 \subseteq \Pi_1 + \Pi_2 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = \Pi_1 + \Pi_2$

Επομένως $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim (\Pi_1 + \Pi_2) = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 - \dim (\Pi_1 \cap \Pi_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim (\Pi_1 \cap \Pi_2) = 2 + 2 - 3 = 1$ ~~και~~

Αρα η τομή 2 επιπέδων είναι ευθεία.